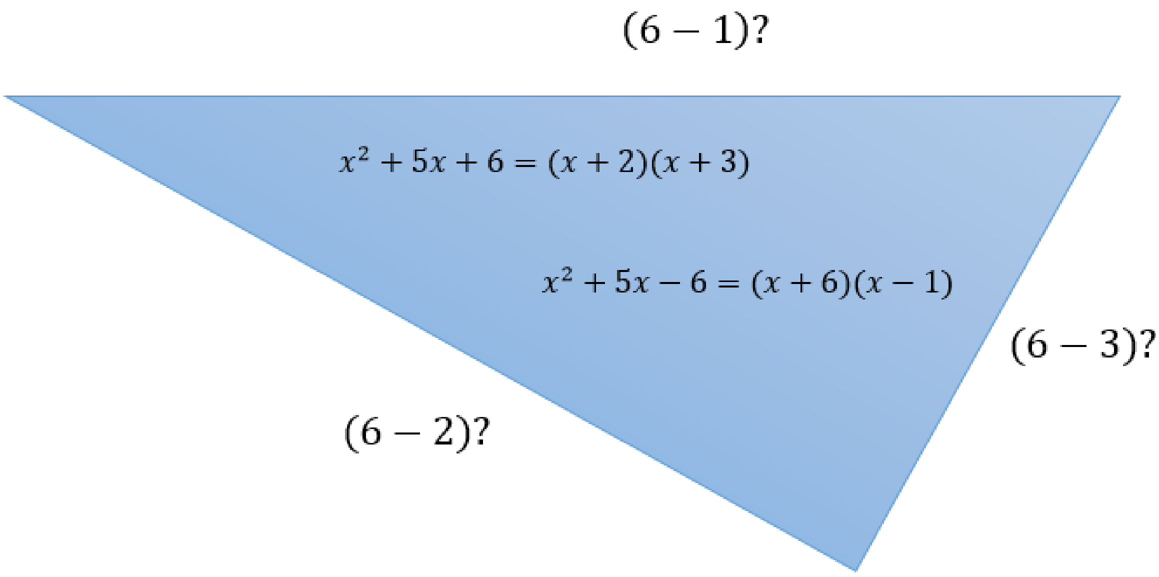
Extract

數學專題研習報告

一切由 (1, 2, 3, 6) 開始



目錄

1. 摘要

在解一元二次方程時曾遇過看似簡單的問題，如解x^2+5x+6及x^2+5x-6但卻容易讓人混淆。無意發現，這些個別一元二次方程原來與畢氏三元數有關。本研習透過觀察這關係，探究兩者之間的數學特性。

本報告有三個目標：第一，找出及解釋個別**一元二次方程與畢氏三角形的關係**；第二，從此關係找出及解釋**孿生畢氏三元數的公解**；第三，我們進而找出近乎是直角等腰畢氏三角形及幾乎是 30°－60°－90°三角形的畢氏三角形，從而尋**求$\sqrt{2}$ 及$\sqrt{3}$分數近似值**，並找出這些組合的特殊數學關係。

2. 研究背景及目的

研究背景

當我們平常做一元二次方程時，發現了一些特別的一元二次方程。例如:$x^2+5x+6=0$ 及 x^2+5x-6 =0，從中觀察到一元二次方程的特性，從而推敲它是否有一定的數學規律。

我們發現x^2+bx+c這類型的代數式，有些代數式中無論c是正數或是負數，我們都可以做到因式分解，有些卻不可以。

可以以整數作因式分解的例子：

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$$

不可以以整數作因式分解的例子：

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

$$x^2+4x-3=?$$

因此我們便想找出是什麼原因導致在x^2+5x+6，x^2+5x-6的兩條代數式中，我們都找到相應的整數去完成因式分解，但有些就不能。

8 總結

結論一：「可加可減」一元二次方程的公解是$(\boldsymbol{nk}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}), \boldsymbol{k}(\boldsymbol{2k}+\boldsymbol{n}), (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n})(\boldsymbol{2k}+\boldsymbol{n}))$

在探究內容(一)中，我們首先是定義了何謂「可加可減」一元二次方程：

存在著$x^2 + px \pm q = 0$，當中可以將之寫成

$$(x+a)(x+b) = x^2 + px + q = 0$$

$$(x-c)(x+d) = x^2 + px - q = 0$$

而 a, b, c, d, p 及 q 均是正整數。

例如： $x^2 + 5x + 6 \equiv (x+2)(x+3)$ 及 $x^2 + 5x - 6 \equiv (x-1)(x+6)$

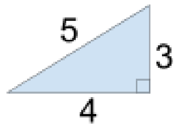
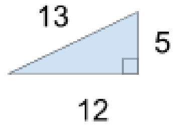
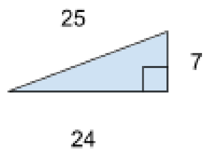
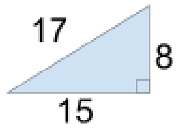
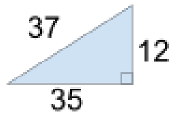
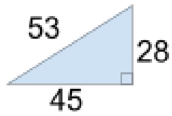
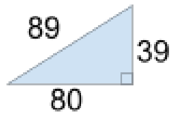
那麼 (1, 2, 3, 6)便是這類方程的絕對值的解。

而這類方程的公解是$(nk, n(k+n), k(2k+n), (k+n)(2k+n))$，當中 n 和 k 是任意正整數。
部份的解如下：

		n					
		1	2	3	4	5	6
k	1	(1,2,3,6)	(2,6,4,12)	(3,12,5,20)	(4,20,6,30)	(5,30,7,42)	(6,42,8,56)
	2	(2,3,10,15)	(4,8,12,24)	(6,15,14,35)	(8,24,16,48)	(10,35,18,63)	(12,48,20,80)
	3	(3,4,21,28)	(6,10,24,40)	(9,18,27,54)	(12,28,30,70)	(15,40,33,88)	(18,54,36,108)
	4	(4,5,36,45)	(8,12,40,60)	(12,21,44,77)	(16,32,48,96)	(20,45,52,117)	(24,60,56,140)
	5	(5,6,55,66)	(10,14,60,84)	(15,24,65,104)	(20,36,70,126)	(25,50,75,150)	(30,66,80,176)
	6	(6,7,78,91)	(12,16,84,112)	(18,27,90,135)	(24,40,96,160)	(30,55,102,187)	(36,72,108,216)

結論二：每一組「可加可減」一元二次方程都直接與特定一組的畢氏三角形相連

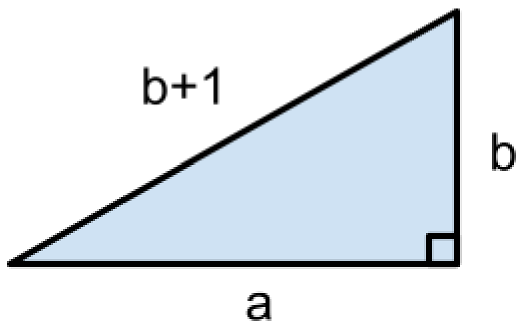
在探究內容(二)中，我們透過數學證明方式證出每一組「可加可減」一元二次方程都直接與一組畢氏三元數有關，並可以將一元二次方程中 x 的係數及常數項與直角三角形的斜邊及面積相扣連。以下是一些例子：

一元二次方程	章節4的解	畢氏三元數	相關三角形	斜邊	三角形面積
$x^2+5x\pm 6=0$	(1, 2, 3, 6)	(3, 4, 5)		5	6
$x^2+13x\pm 30=0$	(2,3,10,15)	(5,12,13)		13	30
$x^2+25x\pm 84=0$	(3,4,21,28)	(7,24,25)		25	84
$x^2+17x\pm 60=0$	(3,5,12,20)	(8,15,17)		17	60
$x^2+37x\pm 210=0$	(5,7,30,42)	(12,35,37)		37	210
$x^2+53x\pm 630=0$	(10,18,35,63)	(28,45,53)		53	630
$x^2+89x\pm 1560=0$	(15,24,65,104)	(39,80,89)		89	1560

結論三：透過「可加可減」一元二次方程可找出斜邊鄰邊相連畢氏三角形及兩條鄰邊相連畢氏三角形的公解

在探究內容(三)中，我們根據內容(二)找出兩種孿生畢氏三角形及其特性，列表如下：

(A) **斜邊鄰邊相連畢氏三角形**的公解：

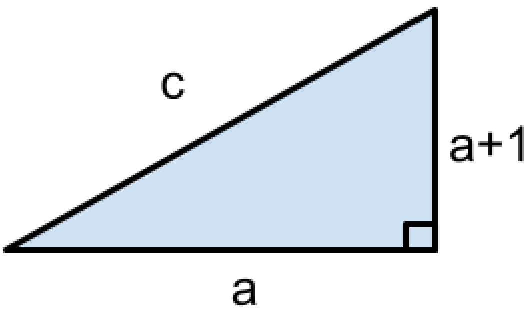


(a, b, b+1) = $(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$

當中 k 是所有正整數。

章節 4.2 的解	相對應的畢氏三元數
(1,2,3,6)	(3,4,5)
(2,3,10,15)	(5,12,13)
(3,4,21,28)	(7,24,25)
(4,5,36,45)	(9,40,41)
(5,6,55,66)	(11,60,61)
(6,7,78,91)	(13,84,85)
(7,8,105,120)	(15,112,113)
(8,9,136,153)	(17,144,145)
(k, k+1, k(2k+1), (k+1)(2k+1))	$(2k+1, 2k^2+2k, \quad 2k^2+2k+1)$

(B) 兩條鄰邊相連畢氏三角形的公解：



(最短的邊 a, 另一條鄰邊 a+1, 斜邊 c) = $(\boldsymbol{a_n+b_n, a_n+b_n+1, 2b_n+1})$

當中

$$a_1=1\text{及}$$
$$b_1=2$$

而(a,b)的條件為

$$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}+1\ \text{及}$$
$$b_n=2a_{n-1}+5b_{n-1}+2\text{或}2a_n+b_{n-1}$$

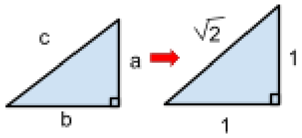
首幾項列表如下：

n=	$a_n=$	$b_n=$	最短的邊	另一條鄰邊	斜邊
			a+b	a+b+1	2b+1
1	1	2	3	4	5
2	6	14	20	21	29
3	35	84	119	120	169
4	204	492	696	697	985
5	1189	2870	4059	4060	5741
6	6930	16730	23660	23661	33461
7	39671	95712	137903	137904	195025

結論四：透過「可加可減」一元二次方程與畢氏三角形的關係可以找出幾乎是等腰直角三角形的畢氏三角形及幾乎是 30° – 60° – 90°三角形的畢氏三角形

最後，我們透過一元二次方程及畢氏三角形關係的規律找出了幾乎是等腰直角三角形的畢氏三角形及幾乎是 30° – 60° – 90°之畢氏三角形，從而找出$\sqrt{2}$及$\sqrt{3}$的分數近似值。

(A) 幾乎是等腰直角三角形的畢氏三角形



畢氏三角形的解 (最短的邊, 另一條鄰邊, 斜邊) = ($\boldsymbol{a_n + b_n, a_n + b_n + 1, 2b_n + 1}$)

當中

$$a_1 = 1\text{及}$$
$$b_1 = 2$$

而(a,b)的條件為

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 1 \text{ 及}$$
$$b_n = 2a_{n-1} + 5b_{n-1} + 2\text{或}2a_n + b_{n-1}$$

列表如下：

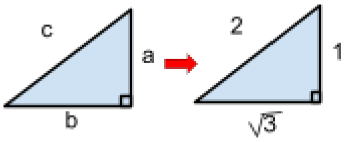
幾乎是等腰直角三角形的畢氏三角形		
最短的邊	另一條鄰邊	斜邊
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025

如此類推

所以 $\boldsymbol{\sqrt{2} \approx \frac{5}{3} \approx \frac{29}{20} \approx \frac{169}{119} \approx \frac{985}{696} \approx \frac{5741}{4059} \approx \frac{33461}{23660} \approx \frac{195025}{137903} \approx \ldots\ldots}$

或$\boldsymbol{\sqrt{2} \approx \frac{5}{4} \approx \frac{29}{21} \approx \frac{169}{120} \approx \frac{985}{697} \approx \frac{5741}{4060} \approx \frac{33461}{23661} \approx \frac{195025}{137904} \approx \ldots\ldots}$

(B) 幾乎是 30° – 60° – 90°三角形的畢氏三角形



畢氏三角形的解 (最短的邊, 另一條鄰邊, 斜邊) =

$$(-c_n + d_n, \mathbf{3c_n - d_n + 1, -2c_n + 2d_n - 1})\ (當n是奇數)$$

$$(-c_n + d_n, \mathbf{3c_n - d_n - 1, -2c_n + 2d_n + 1})\ (當n是偶數)$$

當中

$$c_1 = 3及$$

$$d_1 = 6$$

而(c,d)的條件為

$$c_n = 2c_{n-1}+d_{n-1}\ 及$$

$$d_n = 3c_{n-1}+2d_{n-1} + 1(當n是奇數)或d_n = 3c_{n-1}+2d_{n-1} - 1(當\ n\ 是偶數)$$

列表如下：

幾乎是 30° – 60° – 90°三角形的畢氏三角形					
n=	$c_n =$	$d_n =$	最短的邊	另一條鄰邊	斜邊
			-c+d	3c-d+1 (當 n 是奇數) 3c-d-1 (當 n 是偶數)	-2c+2d-1 (當 n 是奇數) -2c+2d+1 (當 n 是偶數)
1	3	6	3	4	5
2	12	20	8	15	17
3	44	77	33	56	65
4	165	285	120	209	241
5	615	1066	451	780	901
6	2296	3976	1680	2911	3361
7	8568	14841	6273	10864	12545

如此類推

所以 $\mathbf{\sqrt{3} \approx \frac{4}{3} \approx \frac{15}{8} \approx \frac{56}{33} \approx \frac{209}{120} \approx \frac{780}{451} \approx \frac{2911}{1680} \approx \frac{10864}{6273} \approx\ldots\ldots}$

9　參考資料

1.　Heron’s Formula: https://www.mathsisfun.com/geometry/herons-formula.html

2.　作品名稱：除了 3：4：5，還有其它呢
https://jweb.kl.edu.tw/userfiles/1365/document/33918_224-%E6%95%B8%E5%AD%B8-%E5%8D%97%E6%A6%AE%E5%9C%8B%E4%B8%AD.pdf

3.　共軛可分解式之研究 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/030423.pdf

10 個人感受及反思

黃樂堯：

經過這次的研習，讓我更加了解數學中不同範疇的東西可以串連在一起，這次的研習是在我們已經掌握的知識中再深入探討一元二次方程和畢式三角形的關係，讓我覺得驚喜不已，沒想到這兩個方面的東西能有關聯性，除此之外，我還覺得自己的團隊協調性增強了，能和不同的組員有良好的互動和合作，產生不一樣的火花。終述以上兩點，我認為在這次的研習中，我和組員在已有的知識下，再深入研究，在我們良好的合作下，讓我有一個很好的體驗。

黃浩楠：

透過與組員一起完成這份專題研習報告，我意識到分配工作的重要性畢竟既要面對來勢洶洶的病魔，又要與同學們一起討論，變得十分不容易。然而，這是寶貴的經歷，也使我對於數學方面也增進了知識獲益良多，例如一元二次及有趣的海倫公式。我也期望下次的專題演習，磨練着我們的人生！

葉駿暉：

經過今次的研習，令我意識到溝通的重要性。正所謂常在河邊走哪有不濕鞋，當意見不同時，難免會發生爭吵。研習期間，我和一位同學得出兩種不同的結論，我們互相論證自己的結論，吵得不可開交，在其他組員的勸導下，我們靜下心來溝通討論，得出一個大家都認同的結果。

邱家希：

通過這次的學習，令我認識到不少的新知識，亦令我明白到團隊合作的重要，受疫情影響，我和組員都只要在家中利用 ZOOM 去進行溝通，沒有面對面的方便，但最終亦能夠順利完成整份專題研習報告。

余梓駿：

在這次的專題研習中,我們學識了不少新知識,找出了一元二次方程與不同三角形的邊長和$\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$ 的關係,加深我們了對畢氏定理和一元二次方程的認識。希望將來能夠繼續參加專題研習,學習更多知識。

何嘉樂：

在這次專題研習中，我了解到更到數學知識，如海倫公式。同時，探究的過程亦擴闊了我的數學思維，令我意識到數學的魅力。雖然疫情期間，可以見面討論的機會少了，但在齊心協力下我們仍完成了專題研習，我也明白到團結的重要性。